PESTALOZZI-GYMNASIUM Herne
Städtisches Gymnasium für Jungen und Mädchen mit deutsch-englischem Zweisprachenzweig

Aufgaben zur 60. Mathematik-Olympiade in Deutschland – erste Runde

Klasse 5

1. Aufgabe
Anna hat bis 18:00 Uhr Zeit, ihre Hausaufgaben anzufertigen. Sie beginnt um 15:55 Uhr und meint, dass sie ihre Aufgaben in 90 Minuten schaffen wird.

Aber: Um 16:30 Uhr kommt ihre Freundin Lena vorbei. Zunächst reden die Mädchen zwanzig Minuten miteinander, dann bekommen sie ein schlechtes Gewissen und stürzen sich beide auf die Hausaufgaben. Sie schaffen es, eine Viertelstunde konzentriert zu arbeiten, dann muss Lena nach Hause. Nach weiteren zehn Minuten setzt sich Anna wieder an die Hausaufgaben.

Wird Anna mit ihren Hausaufgaben bis 18:00 Uhr fertig, wenn sie wirklich 90 Minuten benötigt?

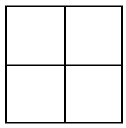
2. Aufgabe Ruth holt jeden Morgen Brötchen vom Bäcker. Die Bäckerei verkauft unter anderem drei Sorten Brötchen: Mohnbrötchen, Kaisersemmeln und Vollkornbrötchen.

(1) Am Montag kauft Ruth von jeder Sorte ein Brötchen und bezahlt 1,55 €.
(2) Am Dienstag kauft sie drei Mohnbrötchen und je eine Kaisersemmel und ein Vollkornbrötchen für insgesamt 2,65 €.
(3) Am Mittwoch kauft Ruth dann ein Mohnbrötchen und drei Vollkornbrötchen, gibt 2,50 € aus und bekommt 9 ct zurück.

Wie viel kostet jede der drei Brötchensorten?

3. Aufgabe

Max und Moritz basteln an einem Spiel für die Mathe-AG. Die Spielsteine sind quadratisch und werden in vier gleich große Quadrate eingeteilt (siehe Abbildung).



Die vier kleinen Quadrate werden jeweils mit einer Farbe ausgemalt.

Spielsteine, die nach einer Drehung so aussehen wie ein anderer von ihnen, gelten als gleich.

a) Zuerst haben sie nur die Farben Rot und Blau zum Ausmalen, sie müssen aber nicht beide Farben für jeden Spielstein verwenden.
Wie viele verschiedene Spielsteine können sie so herstellen?
b) Max nimmt noch Gelb dazu. Wie viele verschiedene Spielsteine können sie nun herstellen, wenn auf jedem Spielstein alle drei Farben vorkommen sollen?
c) Moritz möchte auch noch Grün verwenden. Er will nun vierfarbige Spielsteine anmalen.
Wie viele verschiedene Spielsteine kann er herstellen?

PESTALOZZI-GYMNASIUM Herne
Städtisches Gymnasium für Jungen und Mädchen mit deutsch-englischem Zweisprachenzweig

Aufgaben zur 60. Mathematik-Olympiade in Deutschland – erste Runde

Klasse 6

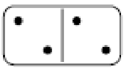
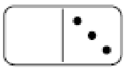
1. Aufgabe
Judith beschäftigt sich mit Zahlen, die nur aus den Ziffern 1, 2 und 3 bestehen. Die Ziffern dürfen mehrfach in den gesuchten Zahlen vorkommen.

a) Wie viele dreistellige Zahlen aus diesen Ziffern gibt es?
b) Wie viele dieser dreistelligen Zahlen gibt es, die von vorn und hinten gelesen gleich sind? Wir nennen solche Zahlen Palindromzahlen.
c) Wie viele vierstellige Palindromzahlen aus diesen Ziffern gibt es, die gerade Zahlen sind?
d) Schließlich fragt sich Judith: Wie viele fünfstellige Palindromzahlen aus diesen Ziffern gibt es, die wiederum gerade Zahlen sind?

2. Aufgabe
In dieser Aufgabe geht es darum, die Zahl 60 als Summe von verschiedenen Primzahlen darzustellen.

a) Stelle 60 als Summe von zwei verschiedenen Primzahlen dar.
Gib alle Möglichkeiten an.
b) Stelle 60 als Summe von drei verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
c) Stelle 60 als Summe von vier verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
d) Stelle 60 als Summe von fünf verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
e) Untersuche, ob man 60 als Summe von sechs verschiedenen Primzahlen darstellen kann.

3. Aufgabe
Die Spielsteine eines Dominospiels haben zwei Felder, auf denen jeweils eine bestimmte Anzahl von Punkten dargestellt ist, zum Beispiel

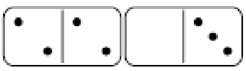
 oder .

Jede mögliche Kombination von zwei Punktzahlen kommt genau einmal vor.

In dem hier betrachteten Dominospiel sind auf den beiden Seiten jeweils 0, 1, 2 oder 3 Punkte möglich. Das Dominospiel hat damit genau zehn Steine.

a) Zeichne die zehn Steine auf.

Nun werden die Steine aneinandergelegt, zum Beispiel:



In diesem Beispiel beträgt der Unterschied der Punktzahlen auf den Feldern der beiden benachbarten Steine 2.

b) Untersuche, ob es möglich ist, die zehn Steine so in eine Reihe zu legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 1 beträgt.
c) Untersuche, ob es möglich ist, die zehn Steine so in eine Reihe zu legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 2 beträgt.
d) Wie viele Dominosteine kann man maximal so in eine Reihe legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 3 beträgt?
e) Begründe, dass man nicht alle zehn Steine so in eine Reihe legen kann, dass nur gleiche Punktzahlen aneinanderstoßen.

PESTALOZZI-GYMNASIUM Herne
Städtisches Gymnasium für Jungen und Mädchen mit deutsch-englischem Zweisprachenzweig

Aufgaben zur 60. Mathematik-Olympiade in Deutschland – erste Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Gegeben sind sechs quadratische Spielsteine:

ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm,
drei Quadrate mit der Seitenlänge 3 cm und
zwei Quadrate mit der Seitenlänge 2 cm.

a) Zeige, dass es nicht möglich ist, mit diesen Spielsteinen ein Quadrat mit der Seitenlänge 8 cm vollständig auszulegen. Argumentiere nicht nur durch Zeichnen!

b) Lege aus allen Spielsteinen eine Figur mit einem Umfang von 32 cm.
Zeichne die Figur auf kariertem Papier.
Zeige, dass deine Figur tatsächlich den Umfang von 32 cm hat.

c) Lege aus allen Spielsteinen eine zusammenhängende Figur mit einem Umfang von 60 cm.
Zusammenhängend soll bedeuten, dass die zusammenliegenden Quadrate eine gemeinsame Kante haben, die 1 cm, 2 cm oder 3 cm lang ist.
Zeichne die Figur auf kariertem Papier.
Zeige, dass deine Figur tatsächlich einen Umfang von 60 cm hat.

2. Aufgabe

Dieser Aufgabe liegt eine Problemstellung zugrunde, die Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, in seinem Buch „Liber Abaci“ im Jahre 1202 veröffentlicht hatte.

Von zwei Männern hatte der eine drei, der andere zwei Brote. Sie kamen gleichzeitig an einen Brunnen, auf dessen Rand sie sich setzten, um ihre Brote zu verzehren. Ein Wanderer kam des Weges, den sie einluden. Er setzte sich zu ihnen, und sie verzehrten alle fünf Brote, jeder die gleiche Ration. Als der Wanderer ging, ließ er fünf Münzen mit gleichem Wert zurück. Von diesen nahm sich der erste der beiden Männer drei und der zweite Mann zwei, entsprechend der Anzahl Brote, die sie zu Beginn hatten. Doch das war falsch, schrieb Fibonacci. Seiner Meinung nach hätten die Münzen den Brotmengen entsprechend, die jeder der Männer an den Wanderer abgab, verteilt werden sollen.

Wie viele Münzen hätte nach Fibonaccis Meinung der erste der beiden Männer und wie viele der zweite bekommen sollen? Begründe deine Antwort.

3. Aufgabe

a) Die dreistellige Zahl 139 hat die Ziffern 1, 3 und 9 sowie die Quersumme $(1 + 3 + 9 =)$ 13.
Ermittle die Summe aller dreistelligen Zahlen, die jeweils aus allen drei Ziffern der Zahl 139 bestehen, und weise nach, dass diese Summe ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl 139 ist.

b) Ermittle die Summe aller vierstelligen Zahlen, die jeweils aus allen vier Ziffern der Zahl 9 876 bestehen, und weise nach, dass diese Summe ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl 9 876 ist.

c) Weise nach, dass für jede vierstellige Zahl z mit untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern gilt:
Die Summe aller vierstelligen Zahlen, die jeweils aus allen vier Ziffern der Zahl z bestehen, ist ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl z.

Aufgaben zur 60. Mathematik-Olympiade in Deutschland – erste Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

An einer Schule fand ein Spendenlauf statt, an dem nur Schüler dieser Schule teilnahmen. Für die Teilnahme am Spendenlauf war ein Startgeld zu zahlen. Das Startgeld für den Spendenlauf betrug für jeden Teilnehmer gleich viel und wurde anschließend für einen guten Zweck gespendet. In der Schülerzeitung der Schule steht: „Wenn 80 Schüler mehr am Spendenlauf teilgenommen hätten, dann hätte 25 % mehr gespendet werden können. Wenn 75 % der Schüler unserer Schule teilgenommen hätten, dann hätte sogar das Eineinhalbfache gespendet werden können.“

a) Ermittle die Anzahl der Schüler dieser Schule, die am Spendenlauf teilgenommen haben.

b) Ermittle die Anzahl der Schüler dieser Schule.

2. Aufgabe

Die paarweise verschiedenen Punkte A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge so auf einer Geraden g, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind. Die Punkte P und Q liegen so auf derselben Seite der Geraden g, dass die Dreiecke ABP und BDQ gleichseitig sind.

a) Veranschauliche diesen Sachverhalt durch eine Zeichnung.

b) Beweise, dass das Dreieck CQP gleichseitig ist.

3. Aufgabe

a) Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 100 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen größer als 0 zu schreiben.

b) Zeige, dass es nicht möglich ist, die Zahl 1024 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen größer als 0 zu schreiben.

Aufgaben zur 60. Mathematik-Olympiade in Deutschland – erste Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

a) Ben ist auf dem Weg zum Bäcker und fragt sich, ob er den verlangten Betrag mit seinem Geld passend wird bezahlen können. In seinem Geldbeutel hat er insgesamt 7 Ein-Euro-Münzen und 21 Zehn-Cent-Stücke. Welche Geldbeträge kann er damit passend bezahlen und wie viele Beträge sind das?

b) Ella hat in ihrem Geldbeutel insgesamt x Ein-Euro-Münzen und y Zehn-Cent-Stücke.
Wie viele verschiedene Geldbeträge kann Ella damit passend bezahlen?
Führe zur vollständigen Beantwortung dieser Frage eine Fallunterscheidung durch und finde für jeden Fall eine Formel, welche die gesuchte Anzahl in Abhängigkeit von x und y angibt.

Hinweis: Jeder passend bezahlbare Betrag soll nur einmal gezählt werden, auch wenn er auf unterschiedliche Arten aus den vorhandenen Geldstücken zusammengesetzt werden kann.

Die 0,00 Euro für einen kostenlosen Einkauf sollen ebenfalls als möglicher Betrag gelten.

2. Aufgabe

Wir betrachten in dieser Aufgabe Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen und untersuchen, welche von ihnen Lösungen der Gleichung

$$a^2 + 3 \cdot a \cdot b = c^2 \qquad (1)$$

sind. So ist das Tripel $(2, 16, 10)$ eine Lösung von (1), weil $2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 16 = 10^2$ wahr ist.

a) Gib zwei weitere Lösungen von (1) an.

b) Zeige, dass die Gleichung (1) unendlich viele Lösungen hat.

c) Wie viele Lösungen gibt es, wenn zusätzlich $c = 2 \cdot a + 3$ gilt?

3. Aufgabe

Die paarweise verschiedenen Punkte A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge so auf einer Geraden g, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind. Die Punkte P und Q liegen so auf derselben Seite der Geraden g, dass die Dreiecke ABP und BDQ gleichseitig sind.

a) Veranschauliche diesen Sachverhalt durch eine Zeichnung.

b) Beweise, dass das Dreieck CQP gleichseitig ist.

Aufgaben zur 60. Mathematik-Olympiade in Deutschland – erste Runde

Jahrgangsstufe EF

1. Aufgabe

a) Ben ist auf dem Weg zum Bäcker und fragt sich, ob er den verlangten Betrag mit seinem Geld passend wird bezahlen können. In seinem Geldbeutel hat er insgesamt 7 Ein-Euro-Münzen und 21 Zehn-Cent-Stücke. Welche Geldbeträge kann er damit passend bezahlen und wie viele Beträge sind das?

b) Ella hat in ihrem Geldbeutel insgesamt x Ein-Euro-Münzen und y Zehn-Cent-Stücke.
Wie viele verschiedene Geldbeträge kann Ella damit passend bezahlen?
Führen Sie zur vollständigen Beantwortung dieser Frage eine Fallunterscheidung durch und finden Sie für jeden Fall eine Formel, welche die gesuchte Anzahl in Abhängigkeit von x und y angibt.

Hinweis: Jeder passend bezahlbare Betrag soll nur einmal gezählt werden, auch wenn er auf unterschiedliche Arten aus den vorhandenen Geldstücken zusammengesetzt werden kann.

Die 0,00 Euro für einen kostenlosen Einkauf sollen ebenfalls als möglicher Betrag gelten.

2. Aufgabe

a) Zeigen Sie: Sind a und b beliebige dreistellige natürliche Zahlen, so lassen die beiden sechsstelligen Zahlen $1000\,a + b$ und $1000\,b + a$ den gleichen Rest bei Division durch 37.

b) Die 3000-stellige Zahl $n = 9999\ldots99$ entsteht durch das Aneinanderreihen von 3000 Neunen.
Zeigen Sie: Die Zahl n ist durch 37 teilbar.

3. Aufgabe Wir betrachten ein bei O rechtwinkliges Dreieck OAB mit den Kathetenlängen $|OA| = a$ und $|OB| = b$, wobei in allen Aufgabenteilen $a > b$ sein soll.

Sei C der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ mit der Strecke $\overline{OA}$.

a) Weisen Sie für die Länge $|BC|$ der Strecke $\overline{BC}$ nach, dass $|BC| = \frac{a^2+b^2}{2a}$ gilt.

b) Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welches die Länge $|BC|$ ganzzahlig ist.
Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welches die Länge $|AB|$ ganzzahlig ist.

c) Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welche die Längen der Seiten und der Höhen des Dreiecks ABC sämtlich ganzzahlig sind.

Hinweis: Die positiven ganzen Zahlen sind die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

In b) und c) ist selbstverständlich jeweils zu zeigen, dass die angegebenen Beispiele die gewünschten Eigenschaften auch haben.

PESTALOZZI-GYMNASIUM Herne
Städtisches Gymnasium für Jungen und Mädchen mit deutsch-englischem Zweisprachenzweig

Aufgaben zur 60. Mathematik-Olympiade in Deutschland – erste Runde

Jahrgangsstufen Q1/Q2

1. Aufgabe

Für positive ganze Zahlen a, b und c werden die Zahlen

$$x = 60a + 13b \text{ und } y = 60a + 11c$$

gebildet.

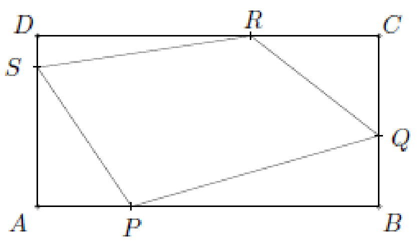
Man bestimme alle Möglichkeiten der Wahl von a, b und c, für die die Gleichung

$$4x^2 - y^2 = 2020$$

gilt, und begründe, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

2. Aufgabe

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Die Punkte P auf $\overline{AB}$, Q auf $\overline{BC}$, R auf $\overline{CD}$ und S auf $\overline{AD}$ seien innere Punkte der Rechteckseiten (siehe Abbildung). Für welche Lagen der Punkte P, Q, R und S hat das Viereck $PQRS$ den kleinsten Umfang?



Hinweis: Innere Punkte einer Strecke sind alle Punkte dieser Strecke mit Ausnahme der Endpunkte.

3. Aufgabe

Ritas Farbe ist rot und Gerds Farbe ist grün. Sie beginnen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd einen noch nicht gefärbten Punkt der Ebene in ihrer Farbe einfärben, wobei Rita beginnt.

Gewonnen hat derjenige, dem es gelingt, in ein Dreieck, dessen drei Eckpunkte die eigene Farbe tragen und bei dem kein innerer Punkt in der Farbe des Gegners gefärbt ist, einen Punkt der eigenen Farbe zu setzen.

Man entscheide, ob einer der Spieler den Gewinn erzwingen kann.

Anmerkung: Ein innerer Punkt eines Dreiecks ist ein Punkt der Dreiecksfläche, der weder auf einer Dreiecksseite liegt noch ein Eckpunkt ist.