Herner Mathematikwettbewerb 2023/2024

als erste Runde der 63. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde
Klasse 5

1. Aufgabe

Anton, Bea, Clemens und Darius haben jeweils ein Haustier. In der Deutschstunde sollen sie ihre Haustiere beschreiben. Es wird von einem Hamster, von einem Wellensittich, von einer Schildkröte und sogar von einer Schlange berichtet. Jedes der Kinder hat eins dieser Tiere zu Hause.

(1) Antons Haustier hat vier Beine.
(2) Clemens' Haustier hat keine Federn, sondern ein Fell.
(3) Beas Haustier kann nicht fliegen.

Ermittle, wer welches Haustier besitzt.

2. Aufgabe

Die Kinder einer 5. Klasse lernen ein Gedicht auswendig, das aus vier Strophen besteht.

In kleinen Gruppen tragen sie das Gedicht in der richtigen Reihenfolge der Strophen vor.

a) Die vier Kinder Anne, Britta, Chris und Daniel sollen jeweils eine Strophe aufsagen.
Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, die vier Strophen auf die vier Kinder zu verteilen.

b) Jetzt sollen Emma und Felix je zwei Strophen vortragen.
Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, die vier Strophen auf die beiden Kinder zu verteilen.

c) Nun sind Gabriel, Hanna und Isabel beim Vortrag. Eines der drei Kinder soll dabei zwei Strophen hintereinander aufsagen, die anderen beiden jeweils eine Strophe.
Ermittle wieder die Anzahl der Möglichkeiten.

Hinweis: Es ist sinnvoll, die Namen der Kinder durch den Anfangsbuchstaben abzukürzen.

3. Aufgabe

Jan spielt mit Zahlen. Alle Zahlen, bei denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt, nennt er JANZAHLEN.

a) Jan wählt die größte zweistellige JANZAHL, verdoppelt sie zuerst und dann verfünffacht er das erhaltene Ergebnis. Welche Zahl erhält er nun?

b) Ermittle die kleinste fünfstellige JANZAHL.

c) Jan subtrahiert von der größten dreistelligen JANZAHL die kleinste dreistellige JANZAHL. Welche Zahl erhält er nun?

d) Untersuche, ob mehr als die Hälfte der Zahlen von 100 bis 125 JANZAHLEN sind.

Herner Mathematikwettbewerb 2023/2024

als erste Runde der 63. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

<u>1. Aufgabe</u>

Tina hat eine Spielzeug-Uhr, die nur einen Stundenzeiger besitzt. Sie dreht ihn jeweils nur um die gleiche Stundenanzahl weiter, das nennen wir Drehweite. Mit der Drehweite 5 kommt Tina zum Beispiel von 12 Uhr auf 5 Uhr, dann von 5 Uhr auf 10 Uhr usw.

Zunächst startet der Zeiger genau auf 12 Uhr. Tina fragt sich, bei welchen Drehweiten der Zeiger nach weniger als zwölf Drehungen wieder auf 12 Uhr stehen wird.

a) Untersuche, bei welchen der Drehweiten von 1 bis 6 dies der Fall ist.

b) Finde eine Drehweite im Bereich von 7 bis 11, für die das auch der Fall ist.

Nun startet Tina bei 1 Uhr.

c) Für welche Drehweiten von 1 bis 7 bleibt der Zeiger irgendwann bei 12 Uhr stehen?

<u>2. Aufgabe</u>

Die Kinder Anna, Bea, Carolin und Dana stellen sich in alphabetischer Reihenfolge ihrer Vornamen auf.

Dann sollen sie untereinander so Plätze tauschen, dass sie nach ihrer Körpergröße sortiert stehen, beginnend mit dem kleinsten Kind. Es zeigt sich, dass dafür nur zwei Kinder ihre Plätze tauschen müssen.

Als nächstes sollen die Kinder ihre Plätze tauschen, so dass sie nach ihrem Alter sortiert stehen, beginnend mit dem jüngsten Kind. Wieder müssen nur genau zwei Kinder ihren Platz tauschen, damit die Reihenfolge stimmt. Carolin ist übrigens das älteste Kind.

Nach den beiden Umsortierungen ist nur Bea am selben Platz wie zu Beginn.

a) Sortiere die Kinder nach ihrem Alter und zeige, dass nur diese Reihenfolge möglich ist.

b) Zeige, dass aus den Angaben **nicht** eindeutig ermittelt werden kann, welches Kind das größte ist.

<u>3. Aufgabe</u>

Jan spielt mit Zahlen. Alle Zahlen, bei denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt, nennt er JANZAHLEN.

a) Jan wählt die größte zweistellige JANZAHL, verdoppelt sie zuerst und dann verfünffacht er das erhaltene Ergebnis. Welche Zahl erhält er nun?

b) Ermittle die kleinste fünfstellige JANZAHL.

c) Jan subtrahiert von der größten dreistelligen JANZAHL die kleinste dreistellige JANZAHL. Welche Zahl erhält er nun?

d) Untersuche, ob mehr als die Hälfte der Zahlen von 100 bis 125 JANZAHLEN sind.

Herner Mathematikwettbewerb 2023/2024

als erste Runde der 63. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Von einem Arzt, einem Biologen, einem Chemiker und einem Dachdecker ist bekannt, dass jeder genau einen der Namen Ehlers, Fink, Gröger und Helbig führt und jeder in genau einer der Städte Ingolstadt, Jena, Köln und Leipzig wohnt. Sie treffen sich bei einer Ausstellung. Weiter ist zu ihnen bekannt:

(1) Der Arzt wohnt in Köln.
(2) Herr Ehlers ist weder Chemiker noch Arzt.
(3) Herr Helbig und Herr Gröger lernten sich über den Chemiker kennen.
(4) Der Dachdecker wohnt in Jena und ist älter als der Herr aus Leipzig.
(5) Herr Helbig, der in Jena wohnt, korrespondiert mit Herrn Fink per E-Mail.
(6) Der Chemiker und der Herr aus Ingolstadt übernachten in verschiedenen Hotels.

Ermittle, welche Person welchen Beruf hat und in welcher Stadt die jeweilige Person wohnt.

2. Aufgabe

Eine Umkehrprimzahl ist eine Primzahl, deren Ziffern bei Aufschreiben in umgekehrter Reihenfolge wieder eine Primzahl ergeben.

Beispiele: Die Zahl 13 ist eine Umkehrprimzahl, da 13 und 31 Primzahlen sind. Die Zahl 157 ist eine Umkehrprimzahl, da 157 und 751 Primzahlen sind. Die Zahl 23 ist keine Umkehrprimzahl, da 32 keine Primzahl ist.

a) Gib alle Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 an.
b) Gib alle Umkehrprimzahlen kleiner als 102 an, die jeweils die Summe von genau drei paarweise verschiedenen Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 sind. Gib zu diesen Zahlen jeweils eine solche Summendarstellung an.
c) Begründe, dass es nicht möglich ist, aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 4 so auszuwählen, dass deren Summe eine Umkehrprimzahl ist.
d) Untersuche, ob man aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 5 paarweise verschiedene so auswählen kann, dass deren Summe eine zweistellige Umkehrprimzahl ist.

Hinweis: Paarweise verschieden heißen Zahlen, wenn keine zwei von ihnen gleich sind. So sind die drei Zahlen 1, 2 und 3 paarweise verschieden, die drei Zahlen 1, 2 und 2 aber nicht.

3. Aufgabe

Die Lage von vier Geraden in einer Ebene, von denen keine mit einer anderen übereinstimmt, kann durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte unterschieden werden.

a) Gib die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten an, die solche vier Geraden untereinander haben können. Fertige eine Zeichnung mit dieser Anzahl an Schnittpunkten an und begründe, warum mehr Schnittpunkte nicht möglich sind.
b) Finde alle weiteren möglichen Anzahlen von Schnittpunkten, die solche vier Geraden untereinander haben können. Fertige für jede dieser Anzahlen eine entsprechende Zeichnung an. Begründe, warum alle anderen Anzahlen nicht möglich sind.

Herner Mathematikwettbewerb 2023/2024

als erste Runde der 63. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

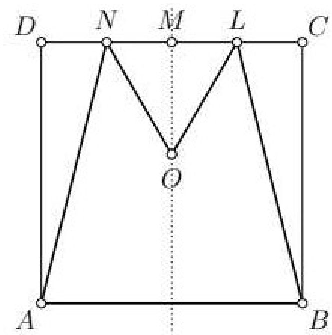
1. Aufgabe

Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 4 cm. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$, der Punkt L ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CM}$ und der Punkt N ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DM}$, siehe die nebenstehende Abbildung.

a) Der Punkt O liege so auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{CD}$ und im Inneren des Quadrats $ABCD$, dass das Fünfeck $ABLON$ den Flächeninhalt $9\,\text{cm}^2$ hat.

Berechne die Länge der Strecke $\overline{MO}$.

b) Untersuche, ob der Punkt O auch so auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{CD}$ und im Inneren des Quadrats $ABCD$ liegen kann, dass das Fünfeck $ABLON$ den Flächeninhalt $7\,\text{cm}^2$ hat.



2. Aufgabe

Die beiden Tabellen sollen so mit Kreuzen × ausgefüllt werden, dass sie dann die folgenden Eigenschaften haben:

(1) In jeder Spalte und jeder Zeile stehen genau drei Kreuze.

(2) In keinem Feld mit gleicher Zeilen- und Spaltennummer steht ein Kreuz.

(3) In einem Feld steht genau dann ein Kreuz, wenn auch im Feld mit vertauschter Zeilen- und Spaltennummer ein Kreuz steht.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Tabelle a

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Tabelle b

Gib jeweils eine so ausgefüllte Tabelle an oder begründe, warum sie nicht so ausgefüllt werden kann.

3. Aufgabe

Bestimme die Anzahl aller im Dezimalsystem sechsstelligen Zahlen, die durch 9 teilbar sind und die Ziffern 2, 0, 2, 3 in genau dieser Reihenfolge unmittelbar aufeinanderfolgend enthalten.

Herner Mathematikwettbewerb 2023/2024

als erste Runde der 63. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

a) Für die Zahl a gelte

$$a = 444\,444\,444\,444\,445^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111$$

und für die Zahl b

$$b = 544\,444\,444\,444\,444^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111\,.$$

Berechne die Quersummen von a und b.

b) Zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl s betrachten wir nun die s-stellige natürliche Zahl k, deren Zifferndarstellung aus s Einsen besteht, also $k = \underbrace{1...1}_{s-\text{mal}}$, sowie die ebenfalls s-stellige natürliche Zahl $m = 4k = \underbrace{4...4}_{s-\text{mal}}$.

Nun ersetzen wir eine beliebige der Ziffern von m durch die Ziffer 5 und erhalten die Zahl n; es sind also s verschiedene Werte für n möglich. Zu jedem dieser Werte bilden wir analog zur obigen Teilaufgabe die Zahl c mit

$$c = n^2 - m^2 + k\,.$$

Ermittle die Anzahl der Werte, welche die Quersummen dieser Zahlen c in Abhängigkeit von der Stellenzahl s annehmen können.

2. Aufgabe

Gegeben sind vier Geraden durch ihre Gleichungen.

$$\begin{aligned} g_1&:\ y = \frac{2}{9}\cdot x + \frac{5}{9}\,,\\ g_2&:\ y = \frac{7}{6}\cdot x - \frac{59}{6}\,,\\ g_3&:\ 7\cdot x - 6\cdot y = 8\,,\\ g_4&:\ 2\cdot x - 9\cdot y = -56\,. \end{aligned}$$

Klassifiziere das konvexe Vieleck so genau wie möglich, das durch die Schnittpunkte dieser vier Geraden bestimmt ist.

Hinweis: Klassifizieren bedeutet hier zu klären, wie viele Ecken das Vieleck hat und ob es besondere Eigenschaften bezüglich der Seiten oder Winkel gibt, sodass dem Vieleck eine besondere Bezeichnung (zum Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichwinkliges Sechseck) zugewiesen werden kann.

3. Aufgabe

a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimme alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände

$$|AP| + |BP|$$

des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Gib den minimalen Wert an.

b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimme alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$|AP| + |BP| + |CP| + |DP|$$

minimal wird.

Herner Mathematikwettbewerb 2023/2024

als erste Runde der 63. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

Von den Zahlen 2023, 2024 und 2025 ist die erste durch die Quadratzahl 289, die zweite durch die Quadratzahl 4 und die dritte durch die Quadratzahl 25 teilbar.

a) Geben Sie drei weitere Beispiele für jeweils drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen an, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

b) Zeigen Sie: Es gibt sogar unendlich viele Beispiele für drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

c) Finden Sie ein Beispiel mit vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

2. Aufgabe

a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände

$$|AP| + |BP|$$

des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Geben Sie den minimalen Wert an.

b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$|AP| + |BP| + |CP| + |DP|$$

minimal wird.

3. Aufgabe

a) Fünf Städte sollen durch Straßen miteinander verbunden werden, sodass man von jeder Stadt aus jede andere erreichen kann. Dabei führt jede Straße von einer Stadt zu einer anderen, ohne dass sich die Straßen überschneiden (kreuzungsfreies Bauen soll möglich sein – notfalls mit Brücken).

Wie viele Straßen muss man wenigstens bauen?

b) Nun sollen 2023 Städte miteinander wie in a) beschrieben verbunden werden. Dabei soll zusätzlich gelten, dass je zwei dieser Städte auf genau eine Weise über einen Weg aus einer oder mehreren Straßen verbunden sind. Als Weg bezeichnen wir dabei eine Fahrtroute zwischen zwei (verschiedenen) Städten, die gegebenenfalls über eine oder mehrere weitere Städte führt, wobei jede dieser weiteren Städte genau einmal durchfahren wird.

Wie viele Straßen (direkte Verbindungen zwischen zwei Städten) hat ein solches Straßennetz?

Herner Mathematikwettbewerb 2023/2024

als erste Runde der 63. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde
Klassen Q1 und Q2

1. Aufgabe

Für eine natürliche Zahl n sei $P(n)$ das Produkt ihrer von 0 verschiedenen Ziffern.

Beispielsweise ist also $P(2023) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Man ermittle, wie viele vierstellige Zahlen n mit der Eigenschaft $P(n) = 12$ existieren.

2. Aufgabe

Man bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$x + |y + 1| = 1\,, \tag{1}$$
$$y + |z + 2| = 1\,, \tag{2}$$
$$z + |x - 2| = 1 \tag{3}$$

im Bereich der reellen Zahlen.

3. Aufgabe

Die neun Punkte A, B, C, D, E, F, G, H und I bilden drei Quadrate $ABHI$, $BCFG$ und $CDEF$, wobei die vier Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge auf einer Geraden g und G, H auf einem gemeinsamen Strahl s mit dem Anfangspunkt B liegen (siehe Abbildung). Die Geraden AF und DI schneiden sich im Punkt S.

Man ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ASD$.